



Серия №12. Раскраски вершин

8 июля

Определение. Раскраска вершин графа в несколько цветов называется правильной, если концы любого ребра покрашены в разные цвета.

- а) Пусть в графе степени всех вершин не превосходят числа d . Докажите, что его вершины можно правильно раскрасить в $d + 1$ цвет.
б) Пусть в связном графе степени всех вершин не превосходят числа d , и есть хотя бы одна вершина степени меньше d . Докажите, что его вершины можно правильно покрасить в d цветов.
- Дан связный граф. Известно, что его невозможно правильно покрасить в k цветов. Назовем вершину *бедной*, если ее степень меньше k . Докажите, что можно из графа выделить некоторое подмножество вершин A и оставить ребра только внутри него так, что в A не будет бедных вершин.
- Вершины некоторого графа нельзя правильным образом раскрасить в менее, чем k цветов. Докажите, что для любой правильной раскраски вершин этого графа в k цветов существует путь, в котором встречается ровно по одной вершине каждого цвета.
- В некотором связном графе 100 вершин, причем степень каждой вершины не больше 9. Докажите, что в этом графе можно выделить 22 вершины так, чтобы любой замкнутый путь, проходящий только по выделенным вершинам, имел четную длину.
- Дан связный граф на n вершинах. Докажите, что его вершины можно покрасить в два цвета так, чтобы количество разноцветных ребер было больше количества одноцветных ребер хотя бы на $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.
- Все вершины графа G имеют степень 3, v – одна из них. Известно, что граф можно правильно покрасить в 3 цвета. Докажите, что это можно сделать так, чтобы соседи вершины v не были одноцветными.
- В графе n вершин, степень каждой из них не больше 8. Докажите, что из графа можно удалить не более n ребер так, чтобы не осталось ни одного полного подграфа на 4 вершинах.